შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 390

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

ცნობილი ფაქტი $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \le \sqrt[3]{\frac{a_1^3+a_2^3+\dots+a_n^3}{n}} \Rightarrow a_1+a_2+\dots+a_n \le n\sqrt[3]{\frac{a_1^3+a_2^3+\dots+a_n^3}{n}}$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{4\sqrt[3]{3}}+\dots+\frac{1}{(k+1)\sqrt[3]{k}}+\dots+\frac{1}{2012\cdot\sqrt[3]{2011}} < 2011\sqrt[3]{\frac{\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2\cdot3^3}+\frac{1}{3\cdot4^3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)^3}+\dots+\frac{1}{2011\cdot2012^3}}{2011}} =$$

$$=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2\cdot3^3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)^3}+\dots+\frac{1}{2011\cdot2012^3}\right)\cdot 2011^2}$$

შევნიშნოთ მკაცრი ~~ნიშანი~~ უტოლობა იმიტომ დაიწერა რომ $a_1\ne a_2\ne a_3\cdots\ne a_n$.

ვაჩვენოთ რომ $\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2\cdot3^3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)^3}+\dots+\frac{1}{2011\cdot2012^3} < \frac{37}{2011^2}$ მაშინ ცხადია რომ ამოცანა დამტკიცებული იქნება.

$\forall\, k>0.$ $k+1>k \Rightarrow k(k+1)^3>k^2(k+1)^2 \Rightarrow \frac{1}{k(k+1)^3}<\frac{1}{k^2(k+1)^2}$

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2\cdot3^3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)^3}+\dots+\frac{1}{2011\cdot2012^3} < \left(\frac{1}{1\cdot2}\right)^2+\left(\frac{1}{2\cdot3}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{2011\cdot2012}\right)^2$$

ცნობილი ფაქტი $\sqrt{ab}\ge\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \Rightarrow a^2b^2\ge\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^4 \Rightarrow a^2b^2 < \frac{1}{a^2b^2}\le\left(\frac{a+b}{2ab}\right)^4$

$$\left(\frac{1}{1\cdot2}\right)^2+\left(\frac{1}{2\cdot3}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)^2+\dots+\left(\frac{1}{2011\cdot2012}\right)^2 < \left(\frac{1+2}{2\cdot1\cdot2}\right)^4+\left(\frac{2+3}{2\cdot2\cdot3}\right)^4+\dots+\left(\frac{k+k+1}{2\cdot k\cdot(k+1)}\right)^4+\dots+\left(\frac{2011+2012}{2\cdot2011\cdot2012}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{2\cdot1+1}{1\cdot2\cdot2}\right)^4+\left(\frac{2\cdot2+1}{2\cdot2\cdot3}\right)^4+\left(\frac{2\cdot3+1}{2\cdot3\cdot4}\right)^4+\dots+\left(\frac{2k+1}{2k(k+1)}\right)^4+\dots+\left(\frac{2\cdot2011+1}{2\cdot2011\cdot2012}\right)^4$$

ᲨᲝᲗᲐ ᲠᲣᲡᲗᲐᲕᲔᲚᲘᲡ ᲔᲠᲝᲕᲜᲣᲚᲘ ᲡᲐᲛᲔᲪᲜᲘᲔᲠᲝ ᲤᲝᲜᲓᲘ
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

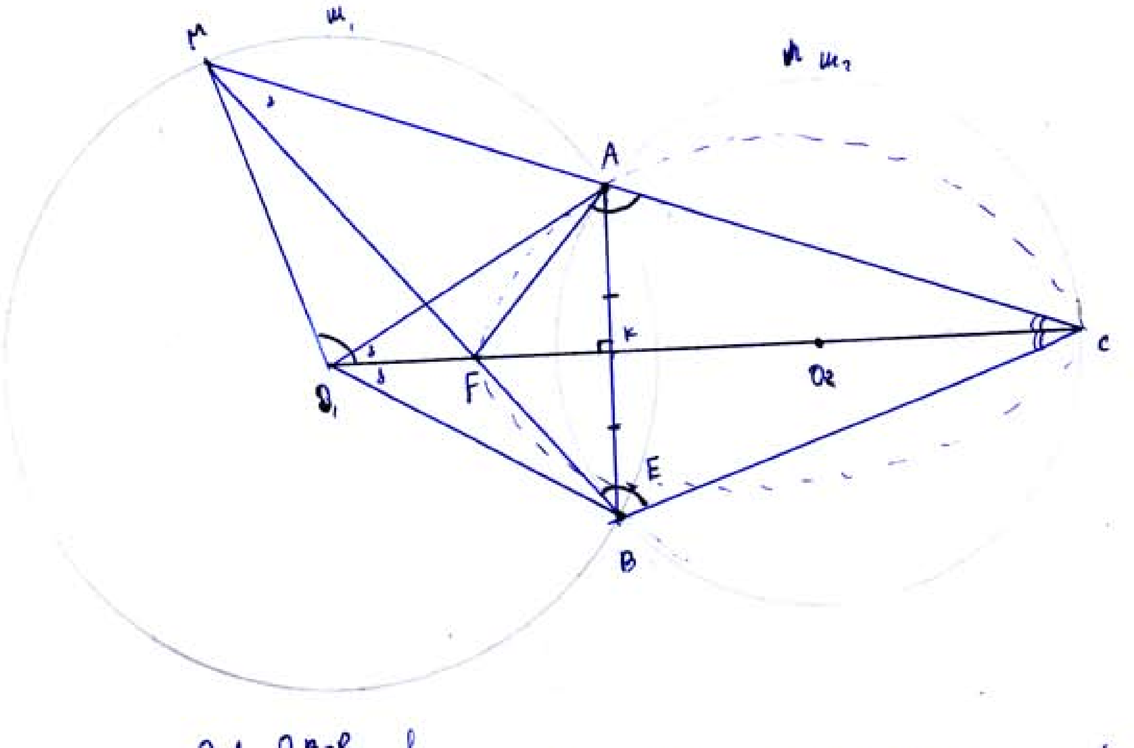
მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 390

ამოცანა № 2

გვერდი № 1

დავუშვათ ხომ AB და O_1O_2 კვეთებიან K-ში.



$$\left.\begin{array}{l} O_1A = O_1B = R_1 \\ CB = CA = R_2 \\ O_1C - \text{საერთო} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta O_1AC = \Delta O_1BC \Rightarrow \angle AO_1C = \angle BO_1C \text{ და } \angle ACO_1 = \angle O_1CB.$$

$AC = CB$ $\angle ACK = \angle BCK \Rightarrow AK = KB$ და $\angle AKF = 90^\circ \Rightarrow AF = FB$.

$$\left.\begin{array}{l} AF = FB \\ AC = CB \\ FC - \text{საერთო} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta FAC = \Delta FBC \Rightarrow \angle FBC = \angle FAC.$$

~~$\angle AO_1C = \angle$~~ $\angle AO_1C = \angle BO_1C = \alpha \Rightarrow \breve{AB} = 2\alpha \Rightarrow \angle BMA = \alpha \Rightarrow \Delta O_1MAF$ ჩახაზული $\Rightarrow \angle BCO_1 = \angle O_1MF = O_1AF$.

თანხვდება $\Rightarrow \angle MO_1F = \angle FAC = FBC \Rightarrow MO_1BC$ ჩახაზული $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \angle O_1AF = \angle O_1CA \\ \angle AO_1C - \text{საერთო} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AO_1F \sim \Delta CO_1A \Rightarrow \frac{AO_1}{CO_1} = \frac{O_1F}{O_1A} \Rightarrow AO_1^2 = CO_1 \cdot O_1F = R_1^2$$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

01.05.2011/ მათ/ IV/ 390

ამოცანა № 2

გვერდი № 2

ცხადია რომ $AO_1^2 = CO_1 \cdot O_1F = R_1^2 = O_1E^2 \Rightarrow O_1E^2 = CO_1 \cdot O_1F \Rightarrow O_1E$ არის AFC სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის მხები.

რ.დ.გ.